

STUDIA METODOLOGICZNE

Piotr WÓJCIK

Estymacja jądrowa w badaniach regionalnej konwergencji

Streszczenie. *Celem artykułu jest przedstawienie nieparametrycznej metody estymacji jądrowej jako narzędzia do empirycznej weryfikacji hipotezy o konwergencji regionalnej, w tym konwergencji grup gmin (klubów). Omówiono, jak taka estymacja uzupełnia inne metody stosowane w badaniach zjawiska konwergencji. W badaniu zastosowano tę metodę do analizy konwergencji osiągnięć edukacyjnych uczniów w Polsce w okresie 2003—2013. Osiągnięcia edukacyjne zmierzono na podstawie wyników egzaminów gimnazjalnych w zakresie profilu matematyczno-przyrodniczego w układzie gmin. Badanie wskazuje na występowanie konwergencji regionalnej wyników egzaminów, przy czym w przypadku analizy okresów trzyletnich stwierdzono występowanie konwergencji klubów, w której gminy o najsłabszych rezultatach egzaminów stanowią odrębny klub.*

Słowa kluczowe: konwergencja regionalna, osiągnięcia edukacyjne, gminy, estymacja jądrowa, warunkowa funkcja gęstości, metoda adaptacyjna.

Estymacja jądrowa jest jedną z popularnych nieparametrycznych metod statystycznych służących do szacowania nieznannej funkcji gęstości zmiennej losowej na podstawie skończonej próbki. Metoda ta ma wiele praktycznych zastosowań, np. w przetwarzaniu sygnałów *data mining* czy ekonometrii (Silverman, 1986; Wand i Jones, 1995; Jeffrey, 1996; Wolfgang, Marlene, Stefan i Axel, 2004; Alexandre, 2009). W analizach regionalnych estymatory jądrowe mogą służyć do analizowania zmian rozkładu badanej zmiennej w czasie. Porównanie może być przeprowadzone przez zestawienie w jednym układzie współrzędnych oszacowanych jednowymiarowych funkcji gęstości, pokazujących rozkład analizo-

wanej zmiennej w kolejnych okresach. Z kolei oszacowanie dwuwymiarowej warunkowej funkcji gęstości może służyć wnioskowaniu o występowaniu regionalnej konwergencji poprzez analizę mobilności wewnątrz rozkładu, czego analiza jednowymiarowa nie umożliwia.

Celem artykułu jest omówienie zastosowania warunkowej estymacji jądrowej w modelowaniu regionalnej konwergencji. W pierwszej jego części omówiono pojęcie konwergencji. Następnie zaprezentowano estymację jądrową jako metodę badania regionalnej konwergencji. Ostatnią część opracowania stanowi empiryczne zastosowanie tej metody do analizy konwergencji osiągnięć edukacyjnych polskich uczniów, mierzonych wynikami egzaminów gimnazjalnych na poziomie gmin w okresie 2003—2013. Wykresy zamieszczone w artykule wygenerowano z wykorzystaniem oprogramowania statystycznego R CRAN¹.

POJĘCIE KONWERGENCJI

Konwergencją w literaturze makroekonomicznej nazywane jest upodabnianie się do siebie krajów lub regionów pod względem poziomu rozwoju². Jest ona jednym z wniosków płynących z neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego (Solow, 1956). Rozróżnia się kilka koncepcji konwergencji — najważniejsze z nich to typu *beta* i typu *sigma* — obie stanowią tzw. klasyczne podejście do badania konwergencji (Sala-i-Martin, 1996). Koncepcja konwergencji typu *beta* zakłada, że kraje lub regiony początkowo biedniejsze będą rozwijały się szybciej niż bogatsze, dzięki czemu w długim okresie dojdzie do wyrównania poziomu ich dochodu. Z kolei konwergencja typu *sigma* zakłada, że zróżnicowanie poziomu zamożności między porównywanymi jednostkami terytorialnymi będzie się zmniejszało (porównuje się odchylenie standardowe lub współczynnik zmienności analizowanej zmiennej w kolejnych okresach). Zjawisko przeciwne do konwergencji nazywane jest dywergencją (Barro i Sala-i-Martin, 1992).

Badanie konwergencji czy dywergencji nie musi dotyczyć zmiennych mierzących zamożność — można analizować upodabnianie się regionów do siebie pod względem dowolnego wskaźnika społeczno-gospodarczego, m.in. stopy bezrobocia, poziomu edukacji, zdrowia czy preferencji politycznych (Tyrowicz i Wójcik, 2010).

Omówione wyżej koncepcje konwergencji były wielokrotnie krytykowane, m.in. za skupianie się na analizie jedynie przeciętnego kraju/regionu (konwergencja typu *beta*) czy pojedynczej mierze zróżnicowania rozkładu (konwergencja typu *sigma*), patrz np. Quah (1993), Wójcik (2004). Metody empirycznej weryfikacji hipotezy o konwergencji pozwalają na stwierdzenie, jak tempo

¹ Core Team R (2016). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. Pobrano z: URL <https://www.R-project.org/>.

² Jest to tak zwana konwergencja realna, w odróżnieniu od konwergencji nominalnej, która dotyczy kryteriów traktatu z Maastricht, czyli stabilności cen, stóp procentowych i kursu walutowego.

wzrostu analizowanej zmiennej przeciętnie zależy od początkowej wartości tej zmiennej w danym regionie (*beta*) czy jak zmienia się odchylenie standardowe albo współczynnik zmienności badanej cechy w czasie (*sigma*). Tymczasem znacznie bardziej interesująca jest analiza dynamiki pełnego rozkładu zmiennej i wewnętrznej mobilności w jego ramach w czasie. Analizę taką można przeprowadzić w wariacie dyskretnym, szacując macierze przejścia (zapożyczone z procesów Markowa³), albo ciągłym, wykorzystując estymatory jądrowe (*kernel density estimation*)⁴. Wykorzystanie macierzy przejścia polega na podziale- niu zakresu zmiennej na małą liczbę przedziałów (grup, klas) i estymacji praw- dopodobieństwa, z jakim regiony będą w kolejnych okresach pozostawały w swojej grupie albo przechodziły do innej o wyższej lub niższej wartości anali- zowanej zmiennej. Metoda ta jest niemal równie popularna, jak klasyczne meto- dy analizy konwergencji zjawisk, również w polskiej literaturze przedmiotu⁵ — zapewne ze względu na relatywną prostotę jej zastosowania. Ma ona jednak ważne ograniczenie polegające na arbitralności doboru granic przedziałów, które definiują poszczególne grupy. Ograniczenie to traci na znaczeniu, gdy z rozkładu dyskretnego przechodzimy do ciągłego, co ma miejsce w przypadku wyko- rzystania estymatorów gęstości.

Dodatkowo analiza pełnego rozkładu umożliwia zaobserwowanie ewentualnej polaryzacji dochodu (tzw. konwergencja klubów), której metody analizy konwe- rgencji *beta* ani *sigma* nie są w stanie uchwycić. Konwergencja klubów oznacza, że upodabnianie się jednostek terytorialnych do siebie pod względem analizo- wanej zmiennej następuje tylko w wyróżnionych podgrupach regionów, które już w okresie początkowym mają zbliżony poziom analizowanej zmiennej.

ANALIZA DYNAMIKI ROZKŁADU ZMIENNEJ Z WYKORZYSTANIEM ESTYMACJI JĄDROWEJ

W przypadku ciągłym zamiast macierzy przejścia dla małej liczby przedzia- łów dokonywana jest estymacja pełnej, warunkowej funkcji gęstości, która po- kazuje, w jaki sposób analizowana zmienna ewoluuje w czasie. Można sobie ją wyobrazić jako odpowiednik macierzy przejścia z nieskończoną liczbą wierszy i kolumn. Jej oszacowania dokonuje się nieparametryczną metodą estymacji jądrowej, która umożliwia oszacowanie praktycznie dowolnego rozkładu, nieko- niecznie zgodnego z jakimkolwiek rozkładem teoretycznym (Kulczycki, 2007). Wykres oszacowanej warunkowej funkcji gęstości pokazuje rozkład masy praw- dopodobieństwa przejścia regionu lub kraju między poszczególnymi wartościami

³ Jest to wykorzystanie skończonych procesów Markowa rzędu pierwszego; patrz np. Podgórska, Śliwka, Topolewski i Wrzosek (2000).

⁴ Opis metodologii przedstawiony jest również w następujących publikacjach: Quah (1996a, b); Durlauf i Quah (1999); Fingleton (1997).

⁵ Patrz np.: Wójcik (2004, 2008, 2009); Markowska-Przybyła (2010); Łażniewska i Górecki (2012); Decewicz (2013), Wałęga (2014).

mi analizowanej zmiennej w rozważanym okresie. Wartości funkcji gęstości w poszczególnych punktach można w uproszczeniu interpretować jako względną częstość obserwacji w otoczeniu danego punktu. Otoczenie to nazywane jest pasmem lub oknem estymacji (*bandwidth, window*), a względna częstość szacowana jest z wykorzystaniem znanej funkcji gęstości, nazywanej funkcją jądra (*kernel*). Funkcja jądra jest zwykle jednomodalna i ma rozkład symetryczny wokół zera, a jej wartości najczęściej maleją wraz z oddalaniem się od zera (wyjątkiem jest np. kwadratowa funkcja jądra, która ma rozkład jednostajny na wybranym przedziale). Całka z funkcji gęstości na całej dziedzinie jest równa jedności. Najczęściej wykorzystywane funkcje jądra to: jednostajna (kwadratowa), trójkątna, Epanechnikowa, gaussowska (normalna), stopnia drugiego (*biweight*) i stopnia trzeciego (*triweight*). Wybrane funkcje jądra przedstawiono na wyk. 1.

Dobór funkcji jądra w niewielkim stopniu wpływa na wynik oszacowania funkcji gęstości dla całej próby. Kluczowy jest właściwy dobór szerokości pasma estymacji dla poszczególnych obserwacji (Turlach, 1993; Chiu, 1996; Jones, Marron i Sheather, 1996; Heidenreich, Schindler i Sperlich, 2010; Zambom i Dias, 2012). Szerokość pasma estymacji (nazywana też parametrem wygładzania) determinuje stopień wygładzenia otrzymanej krzywej lub powierzchni. Zdefiniowanie zbyt szerokiego pasma zaowocuje nadmiernym wygładzeniem funkcji gęstości i nie pokaże rzeczywistej struktury danych. Z kolei wykorzystanie zbyt wąskiego okna da w rezultacie trudną do interpretacji poszarpaną funkcję gęstości, składającą się z wielu wąskich wierzchołków i dolin między nimi.

Wyznaczenie optymalnej szerokości pasma estymacji najczęściej dokonywane jest przy wykorzystaniu kryterium minimalizacji scałkowanego błędu średniokwadratowego:

$$MISE(\hat{f}) = E \left[\int (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] \quad (1)$$

gdzie $f(x)$ to rzeczywista funkcja gęstości analizowanej zmiennej, a $\hat{f}(x)$ to jej nieparametryczny estymator. Problem optymalizacyjny nie jest jednak trywialny, gdyż funkcja $f(x)$ nie jest znana. Teoretyczne podejścia do rozwiązania tego zagadnienia są dość liczne. Generalnie uznaje się, że najbardziej użyteczna i uniwersalna spośród wielu możliwych rozwiązań jest metoda krzyżowego uwiarygodnienia (*cross validation*), a w przypadku jednowymiarowym — prosta i efektywna metoda podstawień (*plug-in*), patrz np. Kulczycki (2007). Formuły służące do obliczania optymalnej szerokości pasma estymacji dla różnych funkcji jądra znaleźć można np. w książce Silvermana (1986).

Często stosowana jest dwuetapowa metoda adaptacyjna (*adaptive kernel density estimation*)⁶ pozwalająca na zróżnicowanie parametru wygładzania dla poszczególnych obserwacji. Dzięki temu można uzyskać większą dokład-

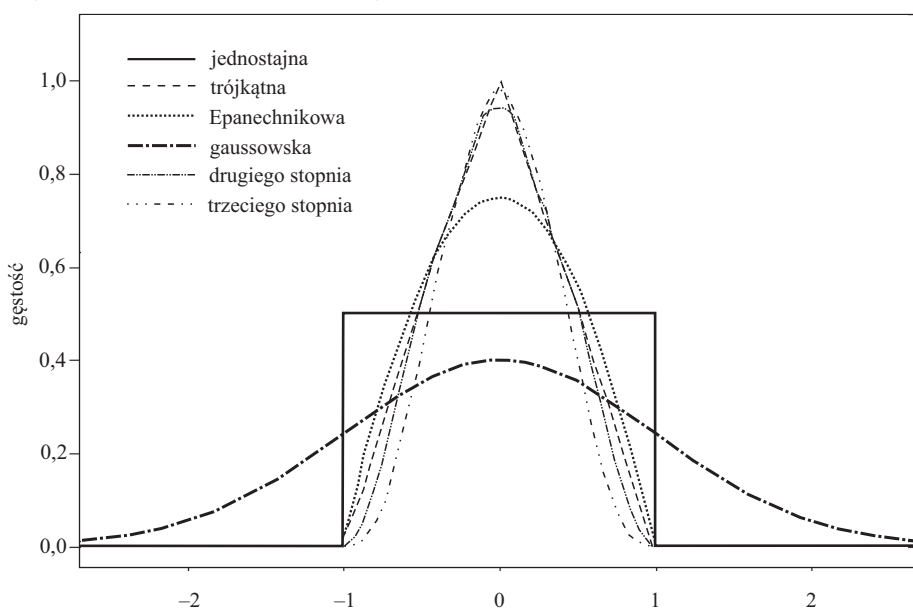
⁶ Patrz np. Botev, Grotowski i Kroese (2010).

ność oszacowania funkcji gęstości w miejscach, gdzie danych jest dość dużo, a równocześnie bardziej wygładzić funkcję gęstości tam, gdzie obserwacji jest mało.

Oznaczmy wyjściowy rozkład (dla okresu początkowego) analizowanej zmiennej przez x , a rozkład końcowy (w ostatnim analizowanym okresie) tej samej zmiennej przez y . Wtedy warunkowy rozkład y przy znanym x można zapisać za pomocą następującej formuły:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} \quad (2)$$

Wykr. 1. WYBRANE FUNKCJE JĄDRA



Źródło: opracowanie własne.

gdzie $f_x(x)$ jest brzegowym rozkładem zmiennej w okresie początkowym, natomiast $f(y, x)$ jest rozkładem łącznym y oraz x . Aby oszacować warunkową funkcję gęstości, należy zastąpić licznik oraz mianownik wyrażenia ich nieparametrycznymi estymatorami. Rozkład brzegowy zmiennej w okresie początkowym (mianownik powyższej formuły) szacowany jest za pomocą dwuetapowej adaptacyjnej estymacji jądrowej dla rozkładów jednowymiarowych, zgodnie z formułą:

$$\hat{f}_{xA}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_x w_i} K\left(\frac{x - x_i}{h_x w_i}\right) \quad (3)$$

gdzie n oznacza liczbę obserwacji, h_x to optymalna szerokość pasma estymacji dla początkowego rozkładu zmiennej, a $K(\cdot)$ to funkcja jądra. W pierwszym etapie metody adaptacyjnej wagi w_i przyjmują dla wszystkich obserwacji wartość 1. Łączny rozkład zmiennej w okresie początkowym i końcowym, czyli licznik równania (2) jest estymowany za pomocą następującej formuły:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_y h_x w_i^2} K\left(\frac{y - y_i}{h_y w_i}\right) K\left(\frac{x - x_i}{h_x w_i}\right) \quad (4)$$

gdzie h_y jest optymalną szerokością pasma estymacji dla rozkładu zmiennej w okresie końcowym (pozostałe oznaczenia mają identyczne znaczenie, jak w przypadku równania 3).

Także łączna funkcja gęstości szacowana jest w pierwszym etapie metody adaptacyjnej bez różnicowania wag dla poszczególnych obserwacji. W kolejnym kroku wstępne oszacowanie gęstości łącznej wykorzystywane jest do obliczenia wskaźników różnicujących lokalnie (dla każdej obserwacji) szerokość pasma zgodnie z wyrażeniem:

$$w_i = \sqrt{\frac{\tilde{f}_g}{\hat{f}_K(y_i, x_i)}} \quad (5)$$

gdzie mianownik formuły pod pierwiastkiem jest oszacowaniem łącznej funkcji gęstości dla obserwacji i obliczonym przy użyciu stałej szerokości pasma na podstawie równania (4), natomiast licznik jest średnią geometryczną wartości tego estymatora policzoną dla poszczególnych punktów danych (odpowiadających sobie par wartości obu zmiennych). Estymacji ostatecznej funkcji warunkowej gęstości dokonuje się wykorzystując wagi z równania (5) w równaniach (3) i (4) i ostatecznie licząc iloraz obu formuł zgodnie z równaniem (2).

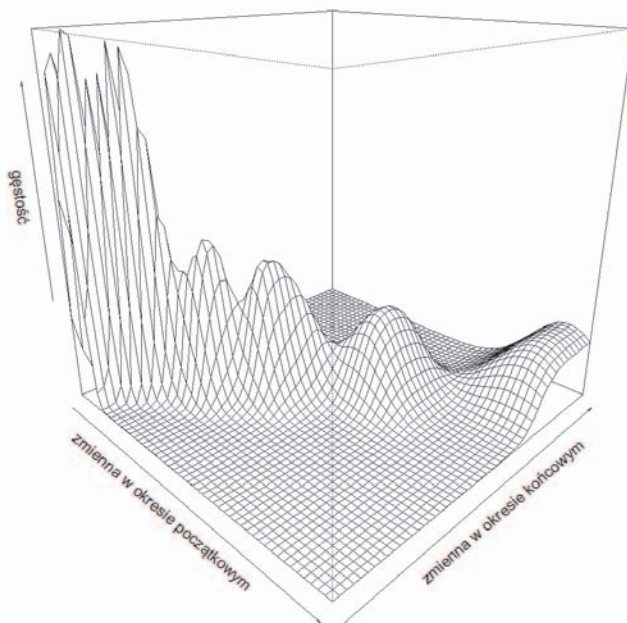
Dwustopniową metodę adaptacyjną zastosowano w opisanym poniżej badaniu empirycznym.

JAK INTERPRETOWAĆ WARUNKOWY ESTYMATOR GĘSTOŚCI

Wykresem funkcji gęstości dla rozkładu warunkowego jest powierzchnia trójwymiarowa. Przykładowy estymator jądrowy warunkowej funkcji gęstości przedstawiono na wyk. 2. Jedna z osi poziomych oznacza rozkład analizowanej zmiennej w okresie początkowym, druga zaś rozkład tej zmiennej w okresie końcowym. Na osi pionowej odkładana jest gęstość prawdopodobieństwa danej kombinacji początkowej i końcowej wartości zmiennej (pod warunkiem określonego poziomu początkowego). Przekrój poprzeczny wykresu prostopadły do osi „zmienna w okresie początkowym” przedstawiał będzie funkcję gęstości wartości zmiennej w okresie końcowym dla konkretnej wartości początkowej. Nawiązując do notacji

z równania 2, będzie to wykres funkcji $f(y|x=x_0)$ dla wybranego x_0 . Pole pod wykresem funkcji dla każdej wybranej wartości początkowej będzie równe jedności, co wynika z własności funkcji gęstości.

Wykr. 2. PRZYKŁADOWY TRÓJWYMIAROWY WYKRES WARUNKOWEJ FUNKCJI GĘSTOŚCI

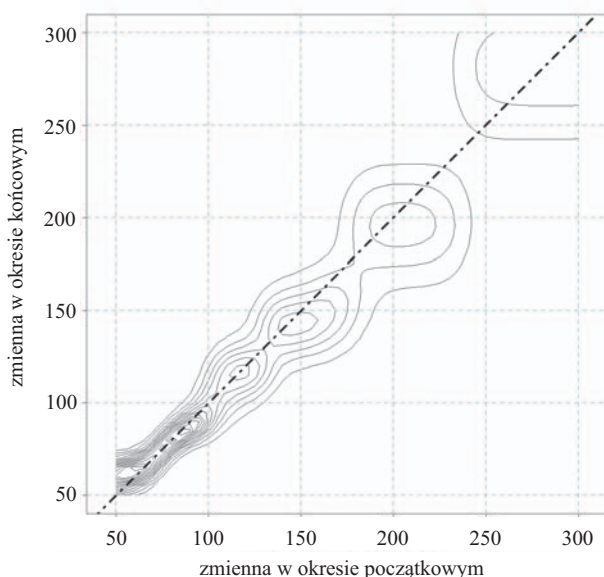


Źródło: jak przy wykr. 1.

Znacznie wygodniejszy w interpretacji jest wykres konturowy warunkowej funkcji gęstości, będący pionowym rzutem otrzymanej powierzchni na płaszczyznę podstawy (wykr. 3). W tym przypadku wykres równoległy do osi oznaczającej początkowy rozkład zmiennej oznaczał będzie występowanie konwergencji, czyli zmniejszenie zróżnicowania zmiennej w okresie końcowym w porównaniu z rozkładem w okresie początkowym. Z kolei wykres prostopadły do tej osi oznaczał będzie dywergencję. Ułożenie masy prawdopodobieństwa wzdłuż przekątnej dowodzi trwałości rozkładu badanej zmiennej w czasie. Występowanie kilku wierzchołków rozkładu, zwłaszcza na jego krańcach, wskazuje na tendencję do polaryzacji. Koncentracja masy prawdopodobieństwa poniżej przekątnej na wykresie konturowym oznacza ogólnie wyższe wartości zmiennej w okresie początkowym niż końcowym, a więc raczej spadek poziomu zmiennej w regionach w badanym okresie. Analogicznie położenie masy prawdopodobieństwa powyżej przekątnej wykresu oznacza wyższe wartości zmiennej w okresie końcowym niż początkowym, czyli ogólny wzrost wartości zmiennej

w regionach w analizowanym przedziale czasowym. Przykład (wykr. 3) pokazuje ułożenie masy prawdopodobieństwa wzdłuż przekątnej, czyli dużą stabilność rozkładu. Wykres jako całość nie układa się równoległe do osi poziomej (początkowej wartości zmiennej), nie ma więc mowy o upodabnianiu się do siebie wszystkich regionów. Wyraźnie wyróżnionych jest jednak kilka wierzchołków rozkładu i niektóre z nich (np. osobno dla wartości początkowej 50—70, ok. 150 i ok. 200) wydają się częściowo układać równoległe do osi poziomej. Sugeruje to upodabnianie się, ale jedynie w ramach podgrup regionów o zbliżonych początkowych wartościach zmiennej, czyli tzw. konwergencję klubów.

Wykr. 3. PRZYKŁADOWY WYKRES KONTUROWY WARUNKOWEJ FUNKCJI GĘSTOŚCI



Źródło: jak przy wykr. 1.

Mimo wymienionych wcześniej wad macierzy przejścia (arbitralność doboru granic przedziałów) wielu badaczy preferuje tę metodę w porównaniu z estymatorami gęstości, nie tylko ze względu na łatwość jej estymacji. Oprócz analizy dynamiki rozkładu zmiennej macierze przejścia pozwalają także oszacować tzw. wektor ergodyczny (przewidywany rozkład długookresowy zmiennej) oraz dają łatwiejsze w interpretacji wyniki w postaci wartości prawdopodobieństwa przejścia (Ponzio i Di Gennaro, 2004).

Estymacji warunkowej funkcji gęstości (a także macierzy przejścia) można dokonać na podstawie danych dla dwóch skrajnych lat z analizowanej próby, czyli jednoznacznie rozumianego okresu początkowego i końcowego. Analiza

taka nazywana jest estymacją dla przejścia bezpośredniego i zwykle dotyczy dość długiego okresu — kilkunastu lub kilkudziesięciu lat. Interesująca dla badacza może być również mobilność wewnątrz rozkładu w krótszych przedziałach czasowych. W takim przypadku zakres lat, dla których dostępne są dane może zostać podzielony na równe przedziały k -letnie, ewentualnie z pominięciem wybranych okresów, jeśli podział na równe przedziały k -letnie nie jest możliwy. Estymacja mobilności dokonywana jest wtedy w przedziałach k -letnich⁷.

Dla analizowanego w artykule okresu 2003—2013 można by wyróżnić np. dwa okresy pięcioletnie, czyli lata 2003—2008 oraz 2008—2013. Analizie poddana zostałaby więc łącznie mobilność między rokiem 2003 i 2008 oraz między rokiem 2008 i 2013. W takim przypadku na potrzeby estymacji jako rozkład początkowy (zmienna x) potraktowany zostałby wektor obejmujący łącznie dane za lata 2003 i 2008, natomiast jako rozkład końcowy (zmienna y) wektor zawierający odpowiadające im dane za lata 2008 i 2013. Oszacowana funkcja gęstości pokazywałaby zatem mobilność wewnątrz rozkładu w okresach pięcioletnich oszacowaną na podstawie przesunięć obserwowanych w dwóch różnych podokresach analizy.

MODELOWANIE REGIONALNEJ KONWERGENCJI OSIĄGNIĘĆ EDUKACYJNYCH W POLSCE

W ostatniej dekadzie polscy uczniowie osiągnęli imponujące postępy w nauce, co znajduje potwierdzenie w międzynarodowych badaniach *Programme for International Student Assessment* (PISA), powtarzanych w odstępach trzyletnich pod auspicjami OECD⁸. W ocenie zadań matematycznych polscy uczniowie awansowali z 25. miejsca na świecie w 2000 r. na 13. miejsce w roku 2012, w czytaniu ze zrozumieniem w roku 2000 startowali z 25. miejsca na świecie, aby w 2012 r. uzyskać miejsce 10. W naukach przyrodniczych wyniki poprawiły się z 22. miejsca w 2000 r. na 9. w 2012 r. W tym kontekście interesujące jest zbadanie, jak przebiega konwergencja osiągnięć edukacyjnych na poziomie lokalnym w Polsce — czy postępy polskich uczniów obserwowane w porównaniach międzynarodowych rozkładają się równomiernie na poszczególne regiony? Czy polskie gminy upodabniają się do siebie pod względem przeciętnych wyników uczniów?

Miarą osiągnięć edukacyjnych w gminach będzie mediana wyniku części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego w danej gminie w kolejnych latach. Egzamin gimnazjalny wybrano do analizy ze względu na jego powszechność (zdają go wszyscy uczniowie trzeciej klasy gimnazjum) i porówny-

⁷ W skrajnym przypadku można sobie wyobrazić analizę dla przejść rocznych, jednak procesy konwergencji analizowane są zwykle w ujęciu średnio- i długookresowym.

⁸ Celem badania jest uzyskanie porównywalnych danych o umiejętnościach uczniów, którzy ukończyli 15. rok życia w celu poprawy jakości nauczania i organizacji systemów edukacyjnych w państwach członkowskich OECD.

walność (jest wystandaryzowany, identyczny dla wszystkich uczniów, oceniany przez zewnętrznych egzaminatorów). Jego część matematyczno-przyrodniczą wybrano ze względu na jej interdyscyplinarność (obejmuje biologię, chemię, geografę, fizykę i matematykę) oraz przekrojowość wymagań — weryfikuje „umiejętności posługiwania się informacjami, identyfikowania praw, zjawisk, procesów i zależności. W jednych przedmiotach mocniej zwrócono uwagę na stosowanie wiedzy w praktyce czy rozwiązywanie problemów, w innych — na znajomość metodyki badań bądź przeprowadzanie doświadczeń”⁹. Wystandaryzowane i porównywalne na wszystkich poziomach regionalnych dane dotyczące wyników egzaminów gimnazjalnych dostępne są od roku 2002, w którym egzamin ten został przeprowadzony po raz pierwszy. Gromadzi je i udostępnia Centralna Komisja Egzaminacyjna. W momencie przeprowadzania badania dostępne były szczegółowe dane do roku 2013.

Estymację warunkowej funkcji gęstości przeprowadzono w dwóch wariantach. W pierwszym analizowano zmiany warunkowego rozkładu osiągnięć edukacyjnych w kolejnych okresach trzyletnich, odpowiadających edycjom badania PISA, w których uczestniczyli już uczniowie gimnazjów (2003, 2006, 2009 i 2012)¹⁰. Jako rozkład początkowy w estymacji potraktowano więc wektor obejmujący łącznie wyniki egzaminów w gminach w latach 2003, 2006 i 2009, a jako rozkład końcowy wektor zawierający kolejno wyniki egzaminów w gminach w latach 2006, 2009 i 2012.

Wynik estymacji jądrowej dla przejść trzyletnich znajduje się na wyk. 4. Na osi poziomej przedstawiono początkowy rozkład osiągnięć edukacyjnych (w roku $t-3$), natomiast na osi pionowej warunkowany nim rozkład końcowy (w roku t). Obie osie mają zakres od 60% do 130%. Można zaobserwować, że warunkowa funkcja gęstości układa się generalnie równolegle do osi poziomej, co wskazuje na występowanie konwergencji osiągnięć edukacyjnych w gminach w kolejnych okresach trzyletnich. Rozkład w roku t jest wyraźnie mniej zróżnicowany niż w roku $t-3$.

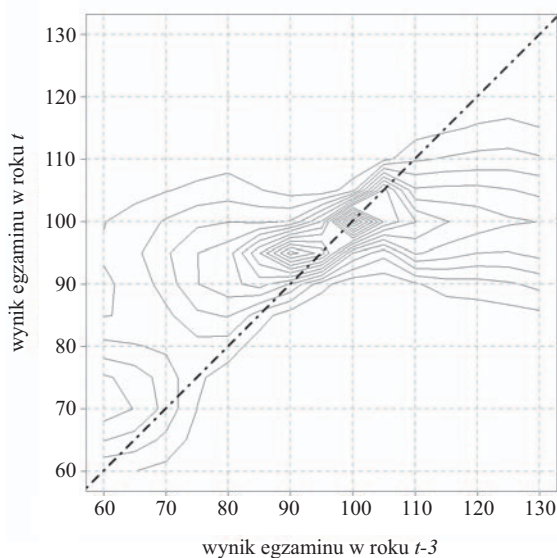
Przykładowo, dla gmin, które w roku $t-3$ osiągały wyniki egzaminów gimnazjalnych między 80% i 120%, w roku t najbardziej prawdopodobny zakres wartości wyników mieści się między 90% i 110%. Obraz nie jest jednak w pełni optymistyczny, gdyż wyraźnie widoczny jest dodatkowy wierzchołek warunkowej funkcji gęstości w lewym dolnym rogu wykresu, dla wyników egzaminów między 60% i 70%. On również zdaje się układać równolegle do osi poziomej wykresu, co wskazuje na występowanie konwergencji w okresach trzyletnich w grupie gmin osiągających najniższe, przeciętne wyniki egzaminu gimnazjalnego w analizowanym okresie. Przeciętne wyniki egzaminów w tej grupie gmin poprawiają się — odpowiadający im wierzchołek wykresu lokuje się powyżej przekątnej, co oznacza, że osiągnięcia edukacyjne uczniów tych gmin były wyż-

⁹ Tyralska-Wojtyca (2011), s. 497.

¹⁰ Pominięto dostępne dane za rok 2013, aby analizować okresy równej długości (trzyletnie) i jednocześnie dopasować je do okresów, w których wykonywane są badania PISA.

sze w roku t niż $t-3$. Jednak wyniki egzaminów w tej grupie gmin pozostają wyraźnie niższe niż w większości pozostałych jednostek terytorialnych. Obserwowanym wzorcem konwergencji dla osiągnięć edukacyjnych w gminach jest więc w tym przypadku konwergencja klubów, w której wyróżniona została jako odrębny klub grupa gmin notujących najniższe wyniki części matematyczno-przyrodniczej egzaminów gimnazjalnych.

Wykr. 4. WARUNKOWA FUNKCJI GĘSTOŚCI DLA KONWERGENCJI OSIĄGNIĘĆ EDUKACYJNYCH (przejścia trzyletnie)



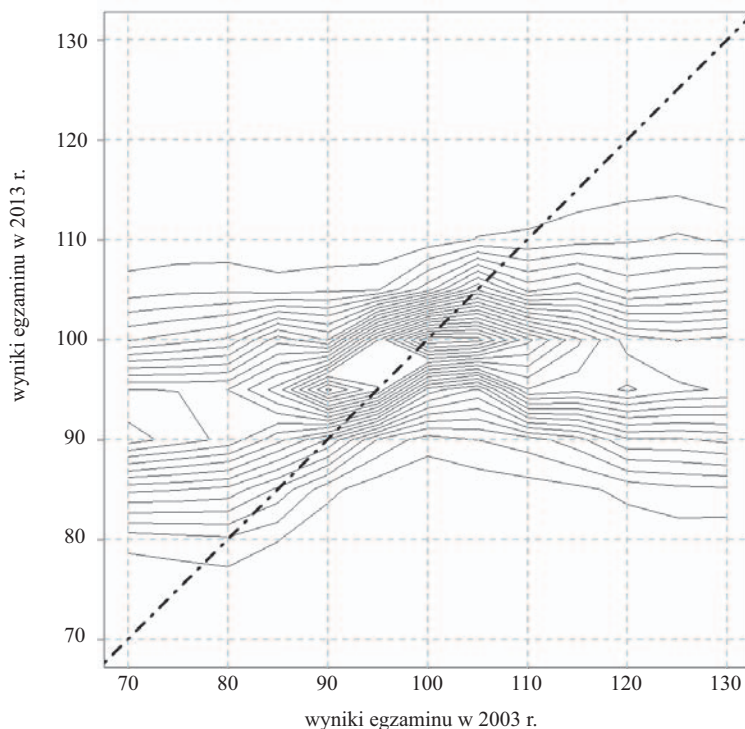
Źródło: jak przy wykr. 1.

W drugim wariancie oszacowano warunkową funkcję gęstości dla przejścia bezpośredniego między latami 2003 i 2013, korzystając z dostępności wyników egzaminów gimnazjalnych w gminach za rok 2013. Jako rozkład początkowy wykorzystano wektor obejmujący wyniki egzaminów w gminach w roku 2003, natomiast jako rozkład końcowy — wektor zawierający wyniki egzaminów w gminach w 2013 r. Wynik estymacji jądrowej dla przejścia bezpośredniego znajduje się na wykr. 5 (wykres konturowy). Na osi poziomej przedstawiono początkowy rozkład osiągnięć edukacyjnych (2003 r.), na osi pionowej zaś warunkowany nim rozkład końcowy (w roku 2013).

Porównując lata 2003 i 2013 można zaobserwować występowanie konwergencji regionalnej osiągnięć edukacyjnych dla wszystkich gmin, bez wyodrębnienia klubów. Warunkowa funkcja gęstości układa się równolegle do osi poziomej. Rozkład w roku końcowym jest wyraźnie mniej zróżnicowany niż

w okresie początkowym. O ile w roku 2003 wszystkie wartości z zakresu między 70% i 130% są wysoce prawdopodobne, o tyle w roku 2013 najbardziej prawdopodobny zakres wartości wyników mieści się między 80% a 110%. Wartości wyników spoza tego przedziału są mniej prawdopodobne.

Wykr. 5. WARUNKOWA FUNKCJI GĘSTOŚCI DLA KONWERCENCJI OSIĄGNIĘĆ EDUKACYJNYCH (przejście bezpośrednie)



Źródło: jak przy wykr. 1.

Podsumowanie

Omówione w artykule zastosowanie nieparametrycznej estymacji jądrowej do badania konwergencji regionalnej stanowi ważne uzupełnienie innych metod analizy tego zjawiska. W porównaniu z metodami klasycznymi, skupiającymi się na analizie jedynie średniego (reprezentatywnego) regionu (konwergencja typu *beta*) czy też jednej miary zmienności rozkładu (konwergencja typu *sigma*), estymacja jądrowa pozwala ocenić dynamikę pełnego rozkładu badanego zjawiska w czasie, a także analizować mobilność regionów wewnątrz rozkładu. Estymacja jądrowa jest swego rodzaju uogólnieniem macierzy przejścia. Pozwala

jednak uniknąć arbitralnego podziału wartości analizowanej zmiennej na kilka przedziałów. Równocześnie macierze przejścia pozwalają także analizować dynamikę pełnego rozkładu i mobilność w jego ramach. Co więcej, dają możliwość łatwiejszej interpretacji uzyskanych oszacowań w odniesieniu do wartości prawdopodobieństwa przejścia między poszczególnymi grupami. Dlatego wydaje się, że estymacja jądrowa powinna być stosowana równolegle z innymi metodami analizy konwergencji, w tym głównie z macierzami przejścia, służąc jako narzędzie uzupełniające pozwalające potwierdzić lub odrzucić wnioski z innych metod.

dr Piotr Wójcik — Uniwersytet Warszawski

LITERATURA

- Alexandre, B.T. (2009). *Introduction to Nonparametric Estimation*. Springer-Verlag, New York.
- Barro, R., Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence, *Journal of Political Economy*, No. 100.
- Botev, Z.I., Grotowski, J.F., Kroese, D.P. (2010). Kernel density estimation via diffusion. *Annals of Statistics*, Vol. 38, No. 5.
- Chiu, S.T. (1996). A comparative Review of Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation. *Statistica Sinica*, Vol. 6.
- Decewicz, A. (2013). Modele Markowa w analizie dynamiki zróżnicowania regionalnego dochodu w krajach UE. *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych*, Vol. 30.
- Durlauf, S.N., Quah, D.T. (1999). The new empirics of economic growth. W: *Handbook of macroeconomics*, Elsevier Science, North-Holland, Amsterdam, New York and Oxford.
- Fingleton, B. (1997). Specification and testing of Markov chain models: An application to convergence in the European Union. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, No. 59.
- Heidenreich, N., Schindler, A., Sperlich, S. (2010). *Bandwidth Selection Methods for Kernel Density Estimation — A Review of Performance*. Pobrano z SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1726428> lub <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1726428>.
- Jeffrey, S.S. (1996). *Smoothing Methods in Statistics*. Springer-Verlag, New York.
- Jones, M.C., Marron, J.S., Sheather, S.J. (1996). A brief survey of bandwidth selection for density estimation. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 91, No. 433.
- Kulczycki, P. (2007). Estymatory jądrowe w zagadnieniach badań systemowych. W: P. Kulczycki, O. Hryniewicz, J. Kacprzyk (red.), *Techniki informacyjne w badaniach systemowych* (rozdział 4), WNT, Warszawa.
- Łażniewska, E., Górecki, T. (2012). Analiza konwergencji podregionów za pomocą łańcuchów Markowa. *Wiadomości Statystyczne*, nr 5(612).
- Markowska-Przybyła, U. (2010). Konwergencja regionalna w Polsce w latach 1997—2007. *Gospodarka Narodowa*, nr 11—12.
- Podgórska, M., Śliwka, P., Topolewski, M., Wrzosek, M. (2000). *Łańcuchy Markowa w teorii i w zastosowaniach*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Ponzio, S., Di Gennaro, L. (2004). Growth and Markov chains: an application to Italian provinces. *Research in Economics: Aims and Methodologies*, Second PhD Conference in Economics, 23—25 September, Università di Pavia, Italy.
- Quah, D. (1993). Galton's fallacy and tests of the convergence hypothesis. *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95, No. 4.

- Quah, D. (1996a). Regional convergence clusters across Europe. *European Economic Review*, Vol. 40, No. 3—5.
- Quah, D. (1996b). Twin peaks: Growth and convergence in models of distribution dynamics. *Economic Journal*, Vol. 106.
- Sala-i-Martin, X. (1996). The Classical Approach to Convergence Analysis. *The Economic Journal*, Vol. 106, No. 437.
- Silverman, B. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis* (Monographs on Statistics and Applied Probability), London: Chapman and Hall.
- Solow, R. (1956). A Contribution to the Theory of the Economic Growth. *Quarterly Journal of the Economics*, Vol. 70.
- Turlach, B.A. (1993). *Bandwidth Selection in Kernel Density Estimation: A Review*. CORE and Institut de Statistique.
- Tyralska-Wojtyca, E. (2011). Nowa formuła egzaminu gimnazjalnego, czyli wiele hałasu o tak niewiele — na przykładzie przedmiotów przyrodniczych. W: B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), *Ewaluacja w edukacji: koncepcje, metody, perspektywy: XVII Krajowa Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej*, Grupa Tomami.
- Tyrowicz, J., Wójcik, P. (2010). Regional Dynamics of Unemployment. A Convergence Approach. W: F. Pastore, F.E. Caroleo (red.), *The Labour Market Impact of the EU Enlargement. A New Regional Geography of Europe?*, Springer-Verlag.
- Wałęga, A. (2014). Spójność ekonomiczna regionów Polski przed i po przystąpieniu do Unii Europejskiej. *Studia Ekonomiczne*, nr 203, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach.
- Wand, M.P., Jones, M.C. (1995). *Kernel Smoothing*, London: Chapman & Hall/CRC.
- Wolfgang, H., Marlene, M., Stefan, S., Axel, W. (2004). *Nonparametric and Semiparametric Models*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Wójcik, P. (2004). Konwergencja regionów Polski w latach 1990—2001. *Gospodarka Narodowa*, nr 11—12.
- Wójcik, P. (2008). Dywergencja czy konwergencja: dynamika rozwoju polskich regionów. *Studia Regionalne i Lokalne*, nr 2(32).
- Wójcik, P. (2009). Wzorce konwergencji regionalnej w Polsce. W: Z.B. Liberda (red.), *Konwergencja gospodarcza Polski*, PTE.
- Zambom, A.Z., Dias, R. (2012). *A Review of Kernel Density Estimation with Applications to Econometrics*. Pobrano z: <http://arxiv.org/pdf/1212.2812v1.pdf>.

Summary. *The aim of the article is to present a non-parametric kernel density estimation method as a tool used for empirical verification of the regional convergence hypothesis, including convergence of clubs. It is explained how kernel density estimation complements other methods applied to verify the phenomenon of convergence. The empirical part shows an application of the non-parametric density estimation to the analysis of regional convergence of educational achievements of Polish pupils, measured by the average results of the mathematical and natural science part of the lower-secondary school leaving exams on the level of municipalities in years 2002—2013. The results of the analysis indicate the existence of regional convergence of exam results for Polish municipalities. In case of the analysis for three-yearly periods convergence of clubs was observed — the municipalities with lowest exam results constitute a separate club of convergence.*

Keywords: regional convergence, educational achievements, municipalities, kernel density estimation, conditional density, adaptive method.

Резюме. *Целью статьи является представление непараметрического анализа ядерной оценки в качестве инструмента для эмпирической проверки гипотезы о региональной конвергенции, в том числе конвергенции групп гмин (клубов). Было обсуждено, каким образом такая оценка дополняет другие методы используемые в обследованиях явления конвергенции. В обследовании этот метод был использован для анализа конвергенции уровня образования учеников в Польше в 2002—2013 гг. Уровень образования измерялся на основе результатов гимназиальных экзаменов в области математики и естественных наук в отношении к гминам. Обследование указывает на существование региональной конвергенции результатов экзаменов, где в случае анализа трехлетних периодов было установлено существование конвергенции клубов, в которой гмины с самыми слабыми результатами экзаменов составляют отдельный клуб.*

Ключевые слова: региональная конвергенция, уровень образования, гмины, ядерная оценка, функция условной плотности, адаптивный метод.