

## Modelowanie rozkładów dochodów kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim<sup>1</sup>

---

**Streszczenie.** *Celem artykułu jest dobór modeli teoretycznych, które możliwie najdokładniej odzwierciedlają rozkłady dochodów kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim. W badaniu wzięto pod uwagę rozkłady teoretyczne najczęściej wykorzystywane przez autorów polskich i zagranicznych w analizie płac i dochodów. Do analizy porównawczej wybrano trzy najlepiej dopasowane modele: Singha-Maddali, Fiska i log-normalny. Przedmiotowe rozkłady badano pod względem precyzji oszacowania miar położenia, zmienności i nierówności w empirycznym rozkładzie dochodów kobiet i mężczyzn. Estymację modeli wykonano na podstawie danych o indywidualnych dochodach kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim w 2013 r., pochodzących z badania panelowego przeprowadzonego w ramach Diagnozy Społecznej. Otrzymane wyniki konfrontowano z rezultatami badania rozkładów dochodów ludności prezentowanymi w polskiej i zagranicznej literaturze przedmiotu.*

**Słowa kluczowe:** rozkład dochodów, nierówności dochodowe, współczynnik Giniego, model Singha-Maddali.

---

Problematyka badania rozkładów dochodów oraz płac w społeczeństwie od wielu lat budzi zainteresowanie ekonomistów. Przedmiotem ich rozważań są tu często: charakterystyka położenia, zmienność w takich rozkładach, a także ocena nierówności dochodowych czy płacowych, jak i oszacowanie dobrobytu społecznego. Nieodzownym elementem tych badań jest próba dopasowania określonych rozkładów teoretycznych do empirycznego rozkładu dochodów.

Modele teoretyczne wspomagają identyfikację niektórych własności rozkładów empirycznych, ułatwiają ich porównanie w różnych zbiorowościach i pozwalają na wyrażenie charakterystyki liczbowej rozkładów (np. średniej arytmetycznej, odchylenia standardowego, współczynnika Giniego, Atkinsona i in.) za pomocą parametrów tychże modeli. Empiryczne rozkłady dochodów najczęściej cechują się jednomodalnością, wyraźną prawostronną asymetrią i dodatnią kurtozą (Kot, 1999ab). Do ich modelowania wykorzystuje się takie rozkłady teoretyczne, które przy odpowiedniej parametryzacji odzwierciedlają te właściwości.

---

<sup>1</sup> Publikacja sfinansowana z dotacji na utrzymanie potencjału badawczego Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

Do nich należą m.in. rozkłady: Pareto, Weibulla, Singha-Maddali, Daguma, Fiska, log-normalny, gamma i in. Autorzy badań próbują wskazać te rozkłady, które możliwie najlepiej odwzorowują empiryczny rozkład dochodów lub płac i jego charakterystykę liczbową (McDonald, Ransom, 1979; Kleiber, Kotz, 2003; Clementi i in., 2010). Prezentowane opracowanie wpisuje się również w ten nurt badań. Celem artykułu jest próba znalezienia modelu teoretycznego, który możliwie najdokładniej będzie odzwierciedlał rozkład dochodów kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim. Badania nad rozkładem dochodów i płac w Polsce prowadzili m.in.: Kot (1999ab, 2000), Ulman (2011) czy Ostasiewicz (2013). Mimo że badania te odnosiły się do różnych zbiorowości statystycznych, a także różnych okresów badawczych, to wskazują one najczęściej na rozkłady Singha-Maddali i Daguma jako modele szczególnie dobrze dopasowane do danych empirycznych. Analiza prowadzona w tym opracowaniu pozwoli zweryfikować ten wniosek zarówno z punktu widzenia precyzji oszacowania charakterystyki empirycznego rozkładu dochodów, jak i charakteru tego oszacowania (tendencji do niedoszacowania lub przeszacowania charakterystyki liczbowej). Pod uwagę wzięto teoretyczne rozkłady najczęściej wykorzystywane w modelowaniu dochodów i posłużono się nimi do oszacowania wybranych miar położenia oraz zmienność i nierówność rozkładu dochodów. Estymację modeli przeprowadzono wykorzystując dane o dochodach indywidualnych kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim w 2013 r., które zaczerpnięto z zasobów *Diagnozy społecznej*<sup>2</sup>.

### *TEORETYCZNE MODELE ROZKŁADÓW DOCHODÓW I ICH CHARAKTERYSTYKA*

We wstępnych badaniach rozważano rozkłady teoretyczne najczęściej stosowane w aproksymacji rozkładu dochodów, jak rozkład Singha-Maddali (Burra typu XII), Daguma (Burra typu III), gamma, Pareto, Weibulla, Fiska (logarytmiczno-logistyczny) i log-normalny. Do oceny stopnia dopasowania rozkładu teoretycznego do empirycznego rozkładu dochodów zastosowano wartości statystyk chi-kwadrat Pearsona,  $D_n$  Kołmogorowa-Smirnowa,  $A^2$  Andersona-Darlinga (Anderson, 1962). Dodatkowo zgodność rozkładu teoretycznego i empirycznego zmierzono za pomocą kwadratu współczynnika korelacji  $R^2$  pomiędzy kwantylami teoretycznymi i kwantylami empirycznymi (D'Agostino, Stephens, 1986; Kot, 1999ab).

Po szacowaniu wymienionych modeli zdecydowano się na wybór takich, które wykazały najwyższe wskaźniki dopasowania do empirycznych rozkładów dochodów kobiet i mężczyzn w badanym województwie. Były to rozkłady: Singha-Maddali, Fiska i log-normalny. W związku z tym dalsze rozważania autora zarówno w metodologicznej, jak i empirycznej części artykułu odnoszą się do tych trzech rozkładów.

---

<sup>2</sup> [www.diagnoza.com](http://www.diagnoza.com) (dostęp 2.10.2014 r.).

Funkcja gęstości rozkładu Singha-Maddali (Singh-Maddala, 1976) ma następującą postać:

$$f_{S-M}(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)^{k+1}} \quad \text{dla } x > 0 \quad (1)$$

gdzie  $\alpha, \beta, k$  — parametry rozkładu.

Wartość średnia i odchylenie standardowe w rozkładzie Singha-Maddali dane są wzorami:

$$\mu_{S-M} = \frac{\beta \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{k\alpha-1}{\alpha}\right)}{\Gamma(k)} \quad (2)$$

$$\sigma_{S-M} = \frac{\beta}{\Gamma(k)} \sqrt{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) \Gamma(k) \Gamma\left(\frac{k\alpha-2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \Gamma^2\left(\frac{k\alpha-1}{\alpha}\right)} \quad (3)$$

gdzie  $\Gamma$  — funkcja gamma.

Wartość modalną i medianę w przedmiotowym rozkładzie można zapisać odpowiednio wzorami (4) i (5):

$$Mo_{S-M} = \beta \left(\frac{\alpha-1}{k\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4)$$

$$Me_{S-M} = \beta \left(2^{\frac{1}{k}} - 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5)$$

Warto zaznaczyć, że średnia (2) istnieje wówczas, gdy spełniony jest warunek  $k\alpha > 1$ , natomiast odchylenie standardowe (3) istnieje, o ile  $k\alpha > 2$ .

Jeśli w modelu Singha-Maddali parametr  $k = 1$ , wówczas rozkład przyjmuje postać modelu Fiska (1961) z parametrem położenia  $\beta$  i parametrem kształtu  $\alpha$ . Funkcja gęstości w rozkładzie Fiska ma więc postać:

$$f_F(x) = \frac{\alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)^2} \quad \text{dla } x > 0 \quad (6)$$

Przekształcając wzory (2) i (3) z uwzględnieniem następujących własności funkcji gamma Eulera:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  oraz  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$  dla  $k=1$  otrzymamy wzory na średnią i odchylenie standardowe w rozkładzie Fiska:

$$\mu_F = \frac{\beta\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \quad (7)$$

$$\sigma_F = \beta \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)} - \frac{\pi^2}{\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}} \quad (8)$$

Wartość modalna i mediana w rozkładzie Fiska dane są odpowiednio wzorami (9) i (10):

$$Mo_F = \beta \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (9)$$

$$Me_F = \beta \quad (10)$$

Trzecim z rozważanych modeli był rozkład log-normalny (Aitchison, Brown, 1969). Tutaj funkcja gęstości, wartość średnia, odchylenie standardowe, wartość modalna i mediana dane są odpowiednio wzorami (11)—(15):

$$f_{L-N}(x) = \frac{1}{\alpha x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{dla } x > 0 \quad (11)$$

$$\mu_{L-N} = \exp(\mu + 0,5\sigma^2) \quad (12)$$

$$\sigma_{L-N} = \sqrt{\exp(2\mu + \sigma)[\exp(\sigma^2) - 1]} \quad (13)$$

$$Mo_{L-N} = \exp(\mu - \sigma^2) \quad (14)$$

$$Me_{L-N} = \exp(\mu) \quad (15)$$

gdzie  $\mu, \sigma$  — parametry rozkładu ( $\mu$  — parametr położenia,  $\sigma$  — parametr kształtu).

Estymację parametrów omawianych modeli przeprowadzono metodą największej wiarygodności. Posłużono się w tym celu danymi pogrupowanymi w szeregach rozdzielczych przedziałowych. Jeśli szereg rozdzielczy składa się z  $k$  przedziałów klasowych, a liczebność w  $j$ -tej klasie wynosi  $n_j$ , natomiast prawdopodobieństwo tego, że dochód przyjmie wartość z klasy  $j$  wynosi  $p_j(\theta)$ , to funkcję wiarygodności wykorzystywaną w estymacji można przedstawić następująco (Kot, 1999ab):

$$L = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_{j=1}^k p_j^{n_j}(\theta) \quad (16)$$

gdzie:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

$\theta$  — wektor szacowanych parametrów modelu.

### *MIARY NIERÓWNOŚCI DOCHODOWYCH I INDEKSY DOBROBYTU SPOŁECZNEGO*

Rozkłady Singha-Maddali, Fiska i log-normalny porównywano pod względem dokładności oszacowań miar nierówności dochodowych i indeksów dobrobytu społecznego. W praktyce najczęściej wykorzystywanym wskaźnikiem nierówności dochodowych jest miara Giniego  $G$ , której wartość informuje, jaką część średniego dochodu  $\mu$  stanowi przeciętna różnica bezwzględna między dochodami osiągniętymi przez pary losowo wybranych jednostek (Kakwani, 1980; Kot, 2000):

$$G = \frac{E|X - Y|}{2\mu} \quad (17)$$

gdzie:

$X, Y$  — dochody dwóch różnych jednostek,

$\mu$  — przeciętny dochód.

Im wyższa jest wartość współczynnika (17), tym większe nierówności dochodowe w zbiorowości. Współczynnik Giniego w modelach Singha-Maddali, Fiska i log-normalnym można wyrazić następującymi wzorami (Kot, 1999ab, 2000):

$$G_{S-M} = 1 - \frac{\Gamma\left(2k - \frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(k - \frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(2k)} \quad (18)$$

$$G_F = \frac{1}{\alpha} \quad (19)$$

$$G_{L-N} = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1 \quad (20)$$

gdzie  $\Phi$  — dystrybuanta rozkładu normalnego standaryzowanego.

Kolejną analizowaną miarą nierówności był współczynnik Atkinsona (1970) odwołujący się do tzw. dochodu ekwiwalentnego, czyli dochodu, który rozdzielony pomiędzy każdą jednostkę zapewniłby taki sam łączny dobrobyt, jak rozkład referencyjny. Wskaźnik ten można obliczyć według wzoru:

$$At = 1 - \frac{(E(X^{1-\varepsilon}))^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}{E(X)} \quad (21)$$

gdzie:

- $\varepsilon$  — parametr wyrażający wagę przypisywaną transferom dochodów pomiędzy różnymi jednostkami,
- $E(X)$  — wartość oczekiwana rozkładu dochodów.

Wraz ze wzrostem parametru  $\varepsilon$  rośnie znaczenie dochodów transferowanych do najuboższych jednostek. W szczególnej sytuacji, gdy  $\varepsilon=0$ , wszystkim transferom dochodów nadawana jest jednakowa waga.

Przedmiotem oszacowania w tym artykule są również indeksy Sena (1973) i Kakwaniego (1980), które obliczamy według wzorów (22) i (23):

$$IS = \mu(1 - G) \quad (22)$$

$$IK = \frac{\mu}{1 + G} \quad (23)$$

Wartości obu indeksów umożliwiają porównanie rozkładów dochodów ze względu na przeciętny poziom dochodów, jak i rozmiary nierówności dochodowych. Przyjmuje się, że jeśli współczynnik Giniego jest mniejszy od 0,5, to wskaźnik Sena (22) jest zdominowany przez przeciętny dochód  $\mu$ . W sytuacji natomiast, gdy  $G \geq 0,5$ , to wówczas indeks Giniego  $G$  dominuje wskaźnik Sena. Z kolei miernik Kakwaniego (23) jest zawsze bardziej wrażliwy na przeciętne dochody niż na wskaźnik Giniego (Kot, 1999ab).

## WYNIKI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Do estymacji teoretycznych rozkładów dochodów kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim, jak już wspomniano, wykorzystano dane z 2013 r. z badania panelowego *Diagnozy społecznej*<sup>3</sup>. W opracowaniu dodatkowo zwiększono liczebność próby badawczej w obu grupach płci do 5000 obserwacji poprzez zastosowanie losowania bootstrapowego z odpowiedniego panelu gospodarstw domowych z uwzględnieniem wag zapewniających właściwą reprezentatywność próby. Stosowany system ważenia uwzględniał różnicę między częstościami udziałów zbadanych osób w łącznej klasyfikacji według miejsca zamieszkania, wieku i płci a rzeczywistą strukturą tych udziałów w populacji (Czapiński, Panek, 2007). Wyniki oszacowania modeli Singha-Maddali, Fiska i modelu log-normalnego dopasowanych do rozkładów dochodów kobiet i mężczyzn zawierają odpowiednio tabl. 1—3.

**TABL. 1. WYNIKI OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU SINGHA-MADDALI DOPASOWANEGO DO ROZKŁADÓW DOCHODÓW KOBIECI I MĘŻCZYŹN W WOJEWÓDZTWIE MAŁOPOLSKIM W 2013 R.**

Grupy badawcze	Parametry modelu			Miary dopasowania do danych empirycznych			
	$\alpha$	$\beta$	$k$	$D_n$	$A^2$	$\chi^2$	$R^2$
Kobiety .....	3,2147	1320,3	0,93344	0,05041	11,191	227,0	0,930
Mężczyźni .....	2,7258	2143,3	1,38290	0,04675	8,516	448,6	0,945

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Diagnozy społecznej* z 2013 r., [www.diagnoza.com](http://www.diagnoza.com) (dostęp 2.10.2014 r.).

**TABL. 2. WYNIKI OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU FISKA DOPASOWANEGO DO ROZKŁADÓW DOCHODÓW KOBIECI I MĘŻCZYŹN W WOJEWÓDZTWIE MAŁOPOLSKIM W 2013 R.**

Grupy badawcze	Parametry modelu		Miary dopasowania do danych empirycznych			
	$\alpha$	$\beta$	$D_n$	$A^2$	$\chi^2$	$R^2$
Kobiety .....	3,0651	1364,7	0,05456	12,778	342,14	0,928
Mężczyźni .....	3,0223	1785,0	0,06151	14,105	415,99	0,942

Źródło: jak przy tabl. 1.

**TABL. 3. WYNIKI OSZACOWANIA PARAMETRÓW MODELU LOG-NORMALNEGO DOPASOWANEGO DO ROZKŁADÓW DOCHODÓW KOBIECI I MĘŻCZYŹN W WOJEWÓDZTWIE MAŁOPOLSKIM W 2013 R.**

Grupy badawcze	Parametry modelu		Miary dopasowania do danych empirycznych			
	$\mu$	$\sigma$	$D_n$	$A^2$	$\chi^2$	$R^2$
Kobiety .....	7,2191	0,58800	0,07141	27,542	497,75	0,924
Mężczyźni .....	7,4875	0,59545	0,06101	13,161	216,42	0,942

Źródło: jak przy tabl. 1.

<sup>3</sup> [www.diagnoza.com](http://www.diagnoza.com) (dostęp 2.10.2014 r.).

Biorąc pod uwagę wartości statystyk chi-kwadrat Pearsona,  $D_n$  Kołmogorowa-Smirnowa,  $A^2$  Andersona-Darlinga, a także  $R^2$  można stwierdzić, że rozkład dochodów kobiet został najwierniej odzwierciedlony za pomocą modelu Singha-Maddali. Modelem najslabiej dopasowanym do empirycznego rozkładu dochodów kobiet był natomiast model log-normalny. Porównanie jakości dopasowania teoretycznych modeli do rozkładów dochodów mężczyzn w woj. małopolskim jest już mniej jednoznaczne. Biorąc pod uwagę wartości statystyki Kołmogorowa-Smirnowa, Andersona-Darlinga i  $R^2$  należy stwierdzić, że model Singha-Maddali lepiej odzwierciedla rozkład dochodów mężczyzn w porównaniu z pozostałymi modelami. Kierując się z kolei statystyką chi-kwadrat Pearsona, należy wskazać na model log-normalny jako najlepiej dopasowany do rozkładu dochodów mężczyzn. Na podstawie wartości statystyk:  $D_n$ ,  $A^2$ ,  $\chi^2$  i  $R^2$  można natomiast stwierdzić, że rozkład dochodów mężczyzn był najslabiej odzwierciedlony przez model Fiska. Przebieg funkcji gęstości rozważanych rozkładów przedstawiają wyk. 1 i 2.

Na podstawie oszacowanych modeli obliczono podstawową charakterystykę liczbową rozkładów: średnią, wartość modalną, medianę, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności, a otrzymane wyniki porównano z charakterystyką obliczoną dla empirycznych rozkładów dochodów mężczyzn i kobiet (tabl. 4).

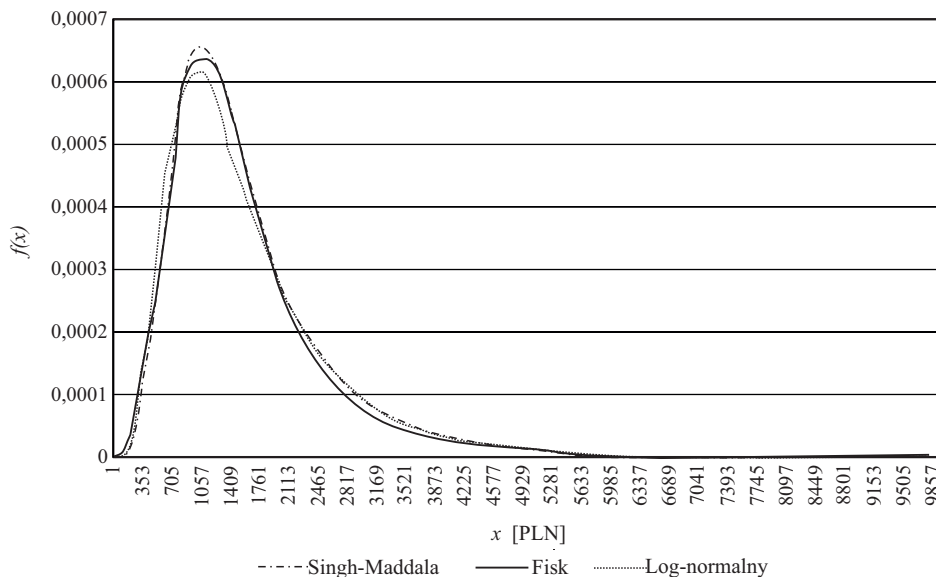
Na podstawie przedstawionych rezultatów można stwierdzić, że rozważane rozkłady przeszacowują przeciętny rzeczywisty poziom dochodów wśród mężczyzn. Przeciętne dochody kobiet są z kolei przeszacowane, gdy stosowane są rozkłady Singha-Maddali i Fiska, natomiast rozkład log-normalny niedoszacowuje przeciętnego dochodu kobiet. W przypadku kobiet, jak i mężczyzn najdokładniejszego oszacowania średniego poziomu dochodów dostarcza rozkład Singha-Maddali. Z tabl. 4 wynika również, że przeciętne dochody mężczyzn w województwie małopolskim są o kilkaset złotych wyższe niż w przypadku kobiet, przy czym najwierniej dysproporcja ta jest odzwierciedlona przez model Singha-Maddali, a najmniej dokładnie przez model Fiska.

Rozważane modele w obu grupach badawczych niedoszacowują empirycznej wartości modalnej dochodów. Najmniejszy błąd oszacowania wartości modalnej w grupach kobiet i mężczyzn popełnimo stosując model Singha-Maddali. Interesujący wydaje się również fakt, że wszystkie modele przeszacowują medianę dochodów kobiet i jednocześnie niedoszacowują mediany dochodów mężczyzn. Najbardziej dokładne oszacowanie mediany dochodów kobiet i mężczyzn można otrzymać za pomocą modelu Singha-Maddali. Wszystkie te modele mają również tendencję do przeszacowywania odchylenia standardowego w rozkładach dochodów.

W przypadku wszystkich trzech modeli otrzymane zróżnicowanie dochodów wśród mężczyzn przewyższa zróżnicowanie obliczone dla danych empirycznych. Wśród kobiet jedynie model log-normalny niedoszacowuje odchylenia standardowego, a pozostałe rozkłady teoretyczne je przeszacowują. Najbardziej precyzyjnego oszacowania odchylenia standardowego w zbiorowości kobiet oraz zbiorowości mężczyzn dostarcza model log-normalny, z kolei przeszacowanie współczynnika zmienności empirycznego rozkładu dochodów obserwujemy w grupie mężczyzn (wszystkie modele teoretyczne) i w grupie kobiet (modele Singha-Maddali, Fiska).

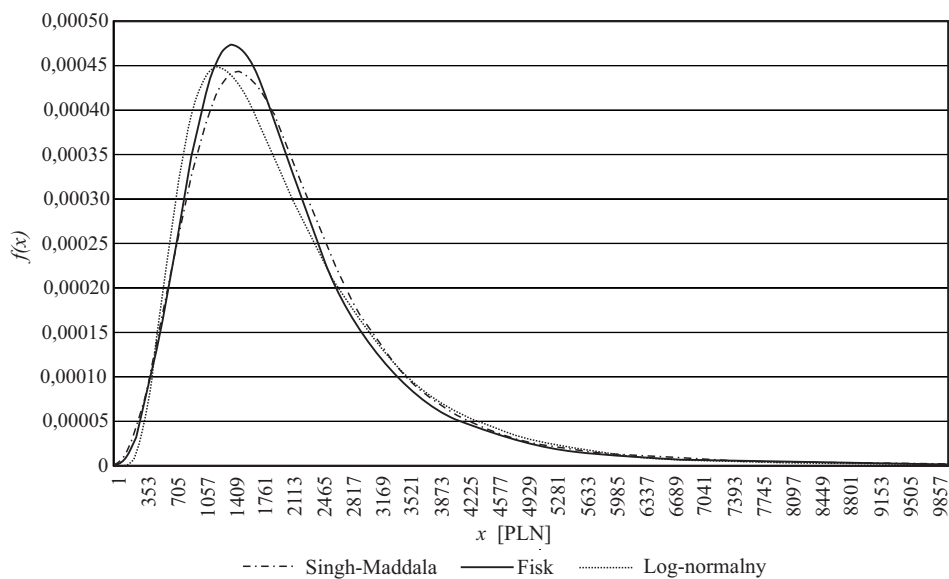


**Wykr. 1. FUNKCJE GĘSTOŚCI MODELU BURRA TYPU XII (Singha-Maddali), LOG-LOGISTYCZNEGO (Fiska) I LOG-NORMALNEGO ROZKŁADU DOCHODÓW KOBIET W WOJEWÓDZTWIE MAŁOPOLSKIM W 2013 R.**



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z *Diagnozy Społecznej z 2013 r.*, [www.diagnoza.com](http://www.diagnoza.com) (dostęp 02.10.2014 r.)

**Wykr. 2. FUNKCJE GĘSTOŚCI MODELU BURRA TYPU XII (Singha-Maddali), LOG-LOGISTYCZNEGO (Fiska) I LOG-NORMALNEGO ROZKŁADU DOCHODÓW MĘŻCZYŹN W WOJEWÓDZTWIE MAŁOPOLSKIM W 2013 R.**



Źródło: jak przy wyk. 1.

Należy zauważyć, że rzeczywiste zróżnicowanie dochodów mierzone współczynnikiem zmienności jest mniejsze u mężczyzn. Najdokładniejsze zaś oszacowanie współczynnika zmienności w obu grupach osób otrzymano za pomocą modelu log-normalnego.

**TABL. 4. CHARAKTERYSTYKA LICZBOWA ROZKŁADÓW DOCHODÓW KOBIET I MĘŻCZYŹN W WOJEWÓDZTWIE MAŁOPOLSKIM W 2013 R.**

Rozkłady według grup badawczych <i>a</i> — kobiety <i>b</i> — mężczyźni	Średnia	Modalna	Mediana	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
Singha-Maddali ..... <i>a</i>	1632,9	1098,4	1360,5	1282,0	0,785
..... <i>b</i>	2127,0	1476,1	1830,8	1428,0	0,671
Fiska ..... <i>a</i>	1636,6	1094,2	1364,7	1274,4	0,779
..... <i>b</i>	2152,1	1421,8	1785,0	1717,6	0,798
Log-normalny ..... <i>a</i>	1622,9	966,2	1365,3	1043,0	0,643
..... <i>b</i>	2131,9	1252,6	1785,6	1390,8	0,652
Empiryczny ..... <i>a</i>	1628,9	1203,2	1341,2	1146,3	0,704
..... <i>b</i>	2121,9	2006,8	1897,8	1346,8	0,635

Źródło: jak przy tabl. 1.

Teoretyczne modele rozkładu dochodów wykorzystano następnie do obliczenia popularnych miar nierówności dochodowych oraz indeksów dobrobytu społecznego. Otrzymane wyniki porównano z rezultatami obliczonymi dla empirycznych rozkładów dochodów (tabl. 5).

**TABL. 5. WYBRANE MIARY NIERÓWNOŚCI DOCHODOWYCH I INDEKSY DOBROBYTU SPOŁECZNEGO**

Rozkłady według grup badawczych <i>a</i> — kobiety <i>b</i> — mężczyźni	Wskaźnik			
	Giniego	Atkinsona (0,5)	Sena	Kakwaniego
Singha-Maddali ..... <i>a</i>	0,323	0,087	1106,242	1234,679
..... <i>b</i>	0,317	0,083	1452,524	1614,909
Fiska ..... <i>a</i>	0,326	0,089	1102,653	1234,002
..... <i>b</i>	0,331	0,092	1440,026	1617,058
Log-normalny ..... <i>a</i>	0,322	0,083	1099,632	1227,212
..... <i>b</i>	0,326	0,085	1436,306	1607,430
Empiryczny ..... <i>a</i>	0,320	0,086	1107,067	1233,664
..... <i>b</i>	0,316	0,082	1451,712	1612,596

Źródło: jak przy tabl. 1.

Z tabl. 5 wynika, że wszystkie trzy modele przeszacowują wskaźnik Giniego zarówno w grupie kobiet, jak i mężczyzn. Najbardziej precyzyjne oszacowanie tego wskaźnika wśród kobiet uzyskano za pomocą modelu log-normalnego, a u mężczyzn — za pomocą modelu Singha-Maddali. Należy zwrócić uwagę, że

rzeczywiste wartości wskaźnika Giniego oraz Atkinsona wskazują, że nierówności dochodowe u kobiet są większe niż u mężczyzn, przy czym tylko model Singha-Maddali prawidłowo odzwierciedlił tę sytuację w odniesieniu do obu wskaźników. Wszystkie trzy modele przeszacowują wskaźnik Atkinsona w grupie mężczyzn, natomiast w grupie kobiet wskaźnik ten jest przeszacowany w modelach Singha-Maddali i Fiska. Jedynie model log-normalny niedoszacowuje empirycznej wartości wskaźnika Atkinsona w grupie kobiet. W tej grupie wszystkie modele teoretyczne niedoszacowują rzeczywistej wartości wskaźnika Sena, natomiast w przypadku mężczyzn niedoszacowanie tego wskaźnika można zaobserwować w przypadku modeli Fiska i log-normalnego. Jedynie w grupie mężczyzn wskaźnik Sena obliczony na podstawie rozkładu Singha-Maddali był wyższy od rzeczywistego. Najbardziej zbliżoną do empirycznej wartości ocenę wskaźnika Sena — zarówno w przypadku kobiet, jak i mężczyzn — otrzymano dla rozkładu Singha-Maddali. Można również stwierdzić, że rozkłady Singha-Maddali oraz Fiska przeszacowują wskaźnik Kakwaniego w grupach kobiet i mężczyzn, a rozkład log-normalny niedoszacowuje go w obu grupach. Najlepszą ocenę rzeczywistej wartości wskaźnika Kakwaniego w przypadku kobiet otrzymano za pomocą modelu Fiska, a dla mężczyzn — za pomocą modelu Singha-Maddali.

## Podsumowanie

Wyniki modelowania rozkładów dochodów kobiet i mężczyzn w województwie małopolskim pokazują, że najlepsze dopasowanie do danych empirycznych wykazał model Singha-Maddali. Dostarcza on częściej niż inne rozważane modele najdokładniejszych oszacowań charakterystyki liczbowej rozkładu dochodów. Dotyczy to zwłaszcza miar tendencji centralnej: średniej, mody i mediany rozkładu dochodów zarówno wśród mężczyzn, jak i kobiet.

Model Singha-Maddali, zwłaszcza wśród mężczyzn, najbardziej precyzyjnie szacuje również miary nierówności dochodowych i indeksy dobrobytu społecznego. W województwie małopolskim najdokładniejsze oszacowanie jednego z indeksów dobrobytu społecznego (wskaźnika Kakwaniego) w zbiorowości kobiet uzyskano natomiast za pomocą modelu Fiska.

Warto też zwrócić uwagę, że model Singha-Maddali najczęściej przeszacowuje wskaźniki nierówności dochodowych i indeksy dobrobytu społecznego zarówno w zbiorowości kobiet, jak i mężczyzn. Model ten wykazuje również tendencję do przeszacowywania średniego dochodu oraz miar zróżnicowania dochodu w obu badanych grupach osób. Z kolei wyraźnie niedoszacowuje on wartości mediany i mody dochodów w zbiorowościach kobiet i mężczyzn. Na podstawie przeprowadzonych badań rozkład Singha-Maddali należy rekomendować jako najlepszy do modelowania rozkładów dochodów mężczyzn i kobiet. Ten wniosek jest zgodny z wynikami podobnych badań prowadzonych nad rozkładami dochodów (McDonald, Ransom, 1979; Kot, 2000; Ostasiewicz, 2013). Jednak stwierdzony charakter oszacowania tym modelem niektórych cech rozkładu dochodów stoi w sprzeczności z wynikami innych autorów. McDonald, Ransom i Ostasiewicz wskazują na tendencję do niedoszacowywania przez model Singha-Maddali wielu cech rozkładu dochodów, podczas gdy w tym opra-

cowaniu wykazano, że jednak częściej przeszacowuje te charakterystyki. Przyczyn tych rozbieżności można upatrywać w odmiennej próbie badawczej, innym okresie badania czy ewentualnie stosowanej metodzie estymacji parametrów modelu. Aby ostatecznie potwierdzić zaobserwowane własności rozkładu Singha-Maddali konieczne są badania przy zwiększonej liczebności próby badawczej i zastosowaniu innych metod estymacji parametrów rozkładu.

---

**dr hab. Marcin Salamaga** — profesor *Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*

## LITERATURA

- Aitchison J., Brown J. A. C. (1969), *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Anderson T. W. (1962), *On the Distribution of the Two-Sample Cramer-von Mises Criterion*, „Annals of Mathematical Statistics”, Vol. 33 (3).
- Atkinson A. B. (1970), *On Measurement of Inequality*, „Journal of Economic Theory”, Vol. 2 (3).
- Clementi F. M., Gallegati M., Kaniadakis G. (2010), *A Model of Personal Income Distribution with Application to Italian Data*, „Empirical Economics”, Vol. 39 (2).
- Czapiński J., Panek T. (2007), *Diagnoza społeczna 2000—2007. Warunki i jakość życia Polaków*, Instytut Psychologii Uniwersytetu Warszawskiego, Rada Monitoringu Społecznego przy Wyższej Szkole Psychologii i Zarządzania w Warszawie, <http://www.ads.org.pl/opis-szczeg.php?id=58>.
- D’Agostino R. B., Stephens M. A. (1986), *Goodness — of-fit Techniques*, Basel, Marcel Dekker Inc., New York.
- Fisk P. R. (1961), *The Graduation of Income Distributions*, „Econometrica”, Vol. 29 (2).
- Kakwani N. C. (1980), *Income Inequality and Poverty* Oxford University Press, New York, Oxford, London.
- Kleiber C., Kotz S. (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, Wiley InterScience, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Kot S. M. (1999a), *Teorie genezy rozkładów płac*, [w:] *Analiza ekonometryczna kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji*, Kot S. M. (red.) Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków.
- Kot S. M. (1999b), *Empiryczna weryfikacja rozkładów płac w Polsce*, [w:] *Analiza ekonometryczna kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji*, Kot S. M. (red.), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków.
- Kot S. M. (2000), *Ekonometryczne modele dobrobytu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków.
- McDonald J. B., Ransom M. R. (1979), *Journal of the Econometric Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Income*, „Econometrica”, Vol. 47 (6).
- Ostasiewicz K. (2013), *Adekwatność wybranych rozkładów teoretycznych dochodów w zależności od metody aproksymacji*, „Przegląd Statystyczny”, Vol. 60 (4).
- Sen A. K. (1973), *On Ignorance and Equal Distribution*, „American Economic Review”, Vol. 63 (5).
- Singh S. K., Maddala G. S. (1976), *A Function for Size Distribution of Incomes*, „Econometrica”, Vol. 44 (5).
- Ulman P. (2011), *Rozkłady dochodów gospodarstw domowych*, [w:] *Sytuacja osób niepełnosprawnych i ich gospodarstw domowych w Polsce*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

**Summary.** *The purpose of this article is the choice of theoretical models which reflect as closely as possible distributions of income between men and women in the Malopolska voivodship. The study took into account the theoretical distributions commonly used in the analysis of wages and incomes by Polish and foreign authors. For a comparative analysis were selected three best-fit models: Singh-Maddala, Fisk and log-normal. These distributions were tested for estimation accuracy of measurement position, the volatility and inequality in the empirical distribution of income between men and women. Estimation models were based on data on individual incomes of men and women in the Malopolska voivodship in 2013 coming from panel survey, conducted in the framework of the Social Diagnosis. The results were compared with the results of the study of population distributions of income presented in the Polish and foreign literature.*

**Keywords:** income distribution, income inequality, the Gini coefficient, Singh-Maddala model.

**Резюме.** *Целью статьи является выбор теоретических моделей, отражающих как можно точно распределения доходов женщин и мужчин в малопольском воеводстве. В обследовании принимались во внимание теоретические распределения, обычно используемые польскими и зарубежными авторами в анализе заработной платы и доходов. Для сравнительного анализа были выбраны три наиболее подходящие модели: Синга-Маддала, Фиска и лог-нормальная. Эти распределения были обследованы в отношении к точности оценки мер расположения, изменчивости и неравенства в эмпирическом распределении доходов женщин и мужчин. Оценка моделей была разработана на основе данных по индивидуальным доходам женщин и мужчин в малопольском воеводстве в 2013 г. Эти данные происходили из панельного обследования проведенного в рамках Общественного диагноза. Полученные результаты были сопоставлены с результатами обследования распределений доходов населения представленных в польской и зарубежной литературе.*

**Ключевые слова:** распределение доходов, доходные неравенства, коэффициент Джини, модель Синга-Маддала.